Denksport mit Würfel

Dieter Holzhäuser www.wieundwarum.de 06.01.2023

In einer Zeitschrift stand sinngemäß die folgende Denksportaufgabe:

Jemand zersägt einen großen Holzwürfel, der einige schwarz angestrichene Seitenflächen hat, in gleichartige kleine Würfel. Er nimmt alle Würfel weg, die geschwärzt sind, und zählt 127. Wie viele Würfel bleiben übrig?

Meine erste Reaktion war: Wie soll das gehen? Kann man diese Frage überhaupt beantworten?

Antwort: Ja, sonst stünde die Aufgabe nicht in einer seriösen Zeitschrift.

Der nächste Gedanke: Mit Gespür und Geschick könnte die Aufgabe zu lösen sein.

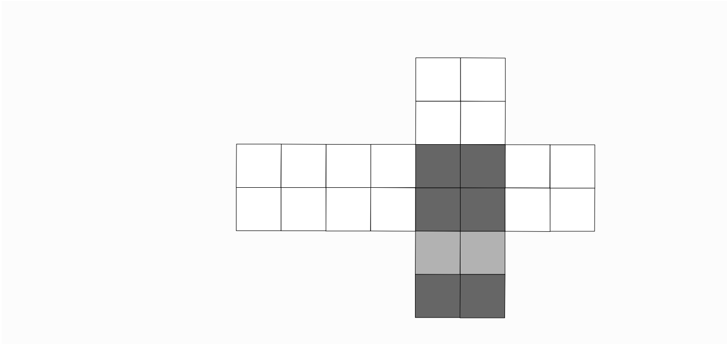
Tatsächlich kann man alle Teilungen >= 8 ausschließen. Wird der Würfel mit 2 geschwärzten Seiten, die aneinander stoßen, in $8^3 = 512$ kleine Würfel zersägt, dann sind 64+56=120 geschwärzt. Liegen die Seiten gegenüber, sind es 128. Auf die Zahl 127 zu kommen, ist in diesem Fall nicht möglich, erst recht nicht, wenn eine dritte geschwärzte Seite dazukommt.

Ebenso kann man Teilungen <= 6 ausschließen. Bei 4 geschwärzten Seiten entstehen mit einer Teilung t = 6 maximal 2x36+2x24=120 kleine geschwärzte Würfel. Durch eine fünfte geschwärzte Seite kommen 16 dazu. Auch hier entsteht keinesfalls die Zahl 127.

Also muss der Würfel in $7^3 = 343$ kleine Würfel zersägt worden sein, was $343 – 127 = 216$ Würfel ohne Schwärzung ergibt.

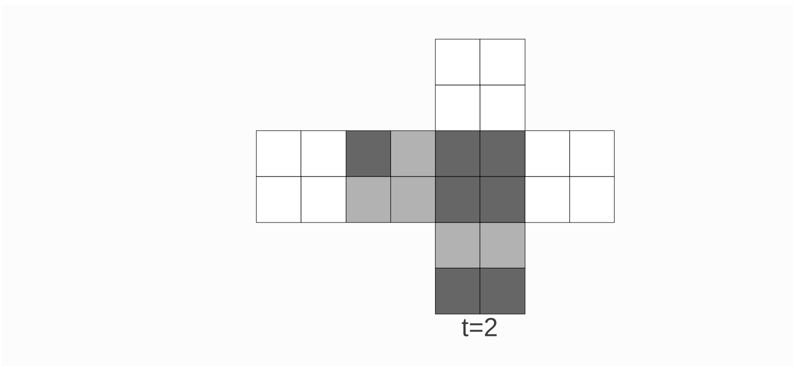
Damit ist die Aufgabe gelöst, aber es ist unbefriedigend nicht zu wissen, welche Seiten bei diesem Würfel geschwärzt sind und wie die Zahl 127 zustande kommt.

Das folgende Bild zeigt die Abwicklung eines Würfels. Er könnte durch Zweiteilung mit den eingezeichneten Sägeschnitten in 8 kleinere Würfel zersägt werden. Der Würfel hat 2 geschwärzte Seiten, die zufällig aneinander stoßen, was zu 6 geschwärzten kleinen Würfeln führt. Kleine Würfel mit 2 geschwärzten Seiten werden nur einmal gezählt. Deshalb ist die zweite geschwärzte Seite jeweils hellgrau dargestellt. Wichtig ist hier, dass aus den zu zählenden Seiten der kleinen Würfel ein Rechteck 2 x 3 = 6 gemacht werden kann.



Ein Rechteck kann immer gebildet werden, wenn der große Würfel 2 geschwärzte Seiten hat. Das gilt unabhängig davon, wo die Seiten liegen und wie viele Teilungen gemacht werden. Da aber die Anzahl geschwärzter Würfel bei der vorliegenden Aufgabe die Primzahl 127 ist, darf kein Rechteck gebildet werden können. Daher muss der große Würfel mehr als 2 geschwärzte Flächen haben.

Bei einem Würfel mit 3 geschwärzten Seiten kann kein Rechteck gebildet werden, wenn die 3 Seiten über Eck angeordnet sind, wie das folgende Bild zeigt.



Die Anzahl n der geschwärzten kleinen Würfel ist die Summe der Anzahlen der 3 Teilflächen. $n_1 = t^2 \quad n_2 = t(t-1) \quad n_3 = (t-1)^2$

$n = n_1+n_2+n_3 = t^2+t(t-1)+(t-1)^2$

Zusammengefasst entsteht die Formel $n = 3t^2-3t+1$, mit der die Anzahl aus der Teilung t berechnet werden kann.

Da aber die Anzahl der Würfel gegeben ist, wird die Formel nach t umgestellt. Das geht mit der quadratischen Ergänzung (siehe Erklärungen im Internet).

$t = \sqrt{\frac{n-1}{3}+0{,}25} + 0{,}5$ Ganzzahlige Teilungen entstehen nur, wenn n eine Zahl von geschwärzten Würfeln ist, die beim Zersägen tatsächlich entsteht, zum Beispiel
n = 127 in der vorliegenden Aufgabe.

Eingesetzt ergibt sich: $t = \sqrt{\frac{127-1}{3}+0{,}25} + 0{,}5 = 7$

Damit wurde errechnet, dass der Würfel mit einer Teilung t = 7 zersägt worden ist.

Zur weiteren Vertiefung

Mit der Formel $n = 3t^2 - 3t + 1$ werden die Anzahlen für Teilungen ab t=2 berechnet.

t = 2 ergibt n = 7 (siehe Bild)
t = 3 ergibt n = 19
t = 4 ergibt n = 37
t = 5 ergibt n = 61
t = 6 ergibt n = 91
t = 7 ergibt n = 127 (siehe Aufgabe)

Bei keiner der Teilungen kann mit der Anzahl der Würfel in der Abwicklung ein Rechteck gebildet werden, weil beispielsweise 37 nicht durch 4 teilbar ist und 91 nicht durch 6. Das gilt generell, denn der Term $3t^2 - 3t + 1$ ist nur abzüglich Rest 1 ein ganzzahliges Vielfaches von t.

Es ist Zufall, dass die berechneten Anzahlen Primzahlen sind. Zum Beispiel ist bei
t = 100 n = 29701 , und das ist keine Primzahl, aber 29701 ist nicht ohne Rest durch 100 teilbar.

Diesen Text habe ich mit großer Sorgfalt erstellt, in der Hoffnung, dass er nützlich ist, aber ohne Garantie für Fehlerfreiheit. Sofern nicht kommerziell, kann der Text frei verwendet werden, wenn der Name des Autors und der vorstehende Link angegeben werden. Die Urheberschaft ist davon unberührt.