Differenzieren Integrieren

Dieter Holzhäuser www.wieundwarum.de 24.05.2020

Die meisten Leser werden die Begriffe Differenzieren und Integrieren als Methoden der Infinitesimalrechnung kennen.

Als Nicht-Mathematiker, aber gelegentlicher Anwender wollte ich mehr Ordnung in mein Wissen bringen. Ich fand, dass der Umkehrcharakter von Differenzieren und Integrieren der Ansatzpunkt dafür sein könnte und auch, dass der speziellen Anwendung auf konkrete Funktionen eine allgemeine Betrachtung vorausgehen müsste.

Um den Umkehrcharakter für ein tieferes Verständnis zu nutzen, wird jede Überlegung und jede Schlussfolgerung in diesem Text auf beides, nämlich das Differenzieren *und* das Integrieren ausgedehnt, was so in Lehrbüchern kaum zu finden ist.

Die historische Entwicklung wird bewusst nicht nach gezeichnet, bei der das Problem, eine Tangente mathematisch exakt an eine Kurve anzulegen, im Vordergrund stand. Auch wenn die Lösung dieses Problems der Schlüssel zur Infinitesimalrechnung ist, stellt sie in der Gesamtschau eher ein Detail dar.

Die mathematischen Objekte Differential und Integral

Wir gehen davon aus, dass eine Strecke aus Punkten zusammensetzt ist. Ein Punkt hat eine Ausdehnung, die unendlich klein, aber nicht Null ist. Wäre sie Null, dann würden Punkte nicht existieren und Strecken auch nicht. Eine unendlich kleine Ausdehnung bedeutet aber andererseits, dass es keine Zahl gibt, mit der sie zu quantifizieren ist und sei sie noch so klein.

In Anlehnung an den Zahlenstrahl soll die betrachtete Strecke der Zahl a entsprechen. Wir bezeichnen die unendlich kleine Ausdehnung eines Punktes dieser Strecke als Differential da. Der Name Differential und der Buchstabe d als Bezeichnung deuten auf eine Differenz hin. Gemeint ist die kleinstmögliche Differenz aus zwei Teilstrecken von a, die also da sein muss. Da Differenz auch für Veränderung steht, ist da der kleinstmögliche Betrag, um den sich die Zahl a verändern kann.

Differentiale können als eine Zahlenart angesehen werden, die auf dem Zahlenstrahl ihren Platz dichter an der Null hat als jede andere Zahl.

Vergleichbar mit den unendlich vielen Punkten, aus denen eine Strecke besteht, setzt sich die Zahl a aus unendlich vielen Differentialen da zusammen. Das heißt, die Summe aller Differentiale der Zahl a hat unendlich viele Summanden und ergibt die Zahl selbst. Diese Summe wird als Integral $\int da$ bezeichnet. Also ist $a=\int da$ (Das Integralzeichen deutet auf den Buchstaben S für Summe hin).

Elementares Integrieren und Differenzieren

Wenn die Summe unendlich vieler Differentiale einer Zahl die Zahl selbst ergibt, dann heißt das auch, dass eine Summe aus *weniger* als unendlich vielen Differentialen keine reelle Zahl ist, sondern ebenfalls ein Differential.

Die Summe aus b Summanden da ist das Produkt $dc = b \cdot da$ Das Differential dc ist b mal größer als das Differential da. Differentiale können also trotz ihrer gegen Null gehenden „Kleinheit“ unterschiedlich groß sein.

Weil $b \cdot da$ ein Differential ist, ist $\int b \cdot da$ ein gültiges Integral. (Nach dem Integralzeichen kann jeder Term stehen, der ein Differential ist.) Also gilt auch $\int dc = \int b \cdot da$

Das ergibt integriert $c = b \cdot a$ Da dc b mal größer als da ist, ist auch die Zahl c b mal größer als die Zahl a. Deshalb kann zum Lösen des Integrals der Faktor b vor das Integralzeichen gesetzt werden $\int dc = b \int da$.

Wir haben das Integrieren wie eine Rechenart auf beide Seiten der Gleichung angewandt.

Umgekehrt wird aus der Gleichung $c = b \cdot a$ durch Differenzieren beider Gleichungsseiten die Gleichung $dc = b \cdot da$. Man schreibt oft eine solche Gleichung in der Form $\frac{dc}{da} = b$. Der Term $\frac{dc}{da}$ wird Differentialquotient genannt.

Auf den ersten Blick erscheint es geheimnisvoll, dass der Quotient zweier unendlich kleiner Zahlen eine reelle Zahl ergibt. Auf den zweiten aber nicht, denn wir hatten oben festgestellt, dass Differentiale unterschiedlich groß sein können, so dass ihr Quotient das Größenverhältnis sein muss.

Differentialquotienten spielen im folgenden Text eine herausragende Rolle.

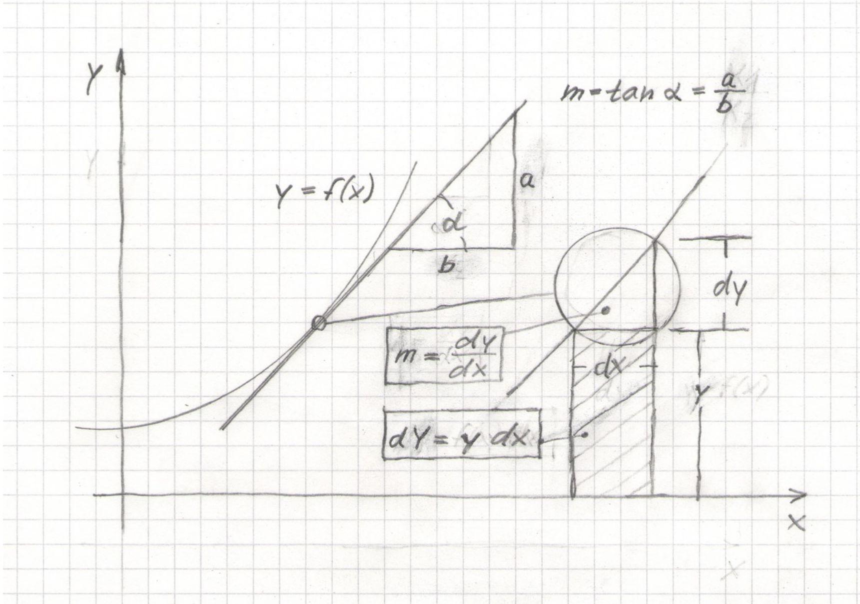
Das infinitesimale Steigungsdreieck

Wir stellen fest, dass die Graphen von Funktionen sich ebenfalls aus Punkten zusammensetzen und betrachten die Funktion $y = f(x)$ im kartesischen Koordinatensystem.

Im allgemeinen Fall ist ein Graph gekrümmt. Wir setzen voraus, dass die Krümmung in dem betrachteten Bereich stetig verläuft, die Linie also keine Knicke hat, und dass auch sonst keine Besonderheiten vorliegen. Das soll generell gelten, was uns erspart, diesen Hinweis im nachfolgenden Text ständig zu wiederholen.

Wir wollen einen Punkt des Graphen "unter die Lupe" nehmen, siehe nächstes Bild. Im Gegensatz zur Strecke gibt es im Punkt eines Graphen *zwei* unendlich kleine Veränderungen, und zwar dx in waagerechter Richtung und dy in senkrechter Richtung. Diese beiden Differentiale bilden die Katheten eines unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecks. Es ist das infinitesimale Steigungsdreieck, das in dem betrachteten Punkt die Steigung des Graphen repräsentiert. Makrokopisch finden wir die infinitesimale Steigung als Steigung der Tangenten wieder, die in diesem Punkt an den Graphen anzulegen ist.

Unter Steigung, verkörpert durch ein Steigungsdreieck, versteht man das Verhältnis der senkrechten Kathete zur waagerechten, wodurch die Steigung der Tangens des Steigungswinkels ist. Da wir in diesem Abschnitt eine allgemeine Betrachtung anstellen, spielt es noch keine Rolle wie er bestimmt wird.



Das Bild oben zeigt, dass der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Steigung m entspricht, also ist $m=\frac{dy}{dx}$

Nicht nur die Steigung ergibt sich aus dem infinitesimalen Steigungsdreieck, sondern auch das unendlich kleine Rechteck dY , das aus der Kathete dx und der Ordinate y gebildet wird, nämlich durch $dY=y\cdot dx$

Steigungs- und Flächenfunktion

Die Steigung im Verlauf eines Graphen ändert sich. Das heißt, der Differentialquotient ist von x abhängig und stellt den Funktionswert einer Funktion dar, die Steigungsfunktion oder Ableitung genannt wird. Man schreibt

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

Die Bezeichnung $f'(x)$ weist darauf hin, dass die Steigungsfunktion ein Abkömmling der Funktion $f(x)$ ist. (y' bzw. $f'(x)$ werden gesprochen: "y Strich bzw. f Strich von x ")

Wegen $y=f(x)$ kann man dy durch $d(f(x))$ ersetzen.

$y'=f'(x)=\frac{d(f(x))}{dx}$ zeigt, dass die Ableitung durch Differenzieren der Funktion $f(x)$ entsteht.

Das infinitesimale Rechteck $dY=y\cdot dx$ unterhalb der Kathete dx des Steigungsdreiecks ist ebenfalls von x abhängig. Es liefert aber keine reelle Zahl, die ein Funktionswert sein könnte. Der ergibt sich erst, wenn die unendlich vielen infinitesimalen Rechtecke unter den Punkten des Graphen von 0 bis x summiert werden, also durch das Integral. Die von x abhängige Fläche in den genannten Grenzen unter dem Graphen ist der Funktionswert einer Funktion

$Y = F(x) = \int_0^x y \cdot dx$, die wir als Flächenfunktion bezeichnen.

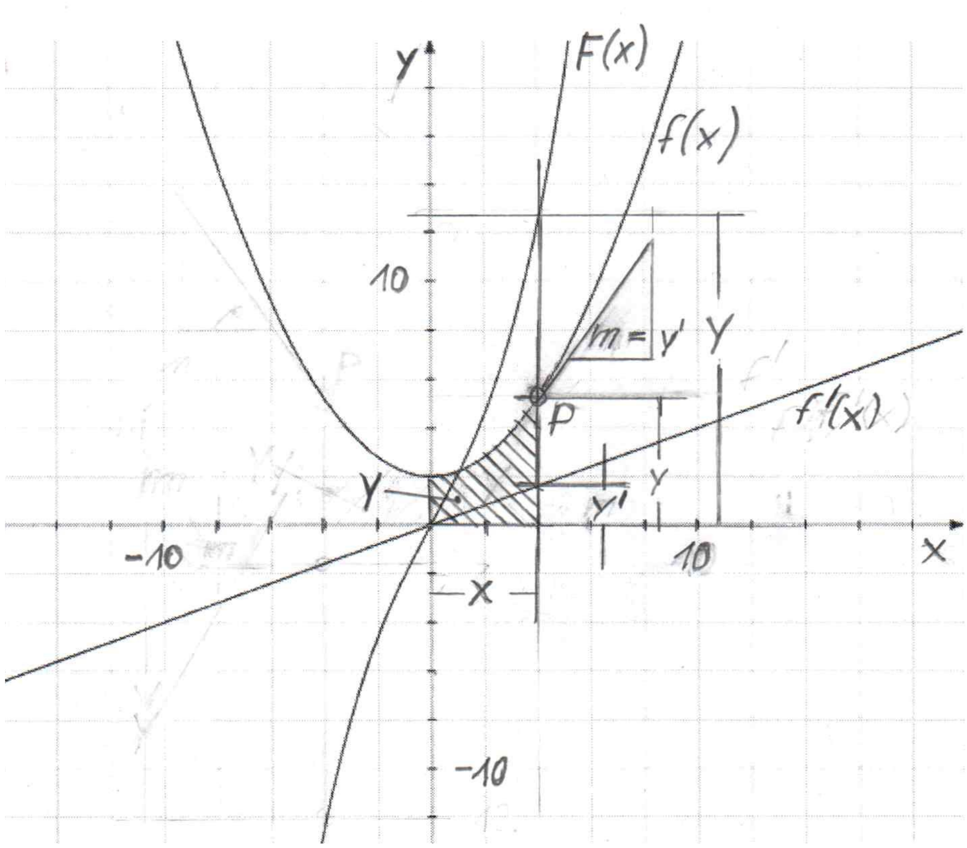
> Die Bezeichnung $F(x)$ weist auf die Verwandtschaft mit $f(x)$ hin. Die Bezeichnung Y haben wir als Pendant zu y‘ eingeführt, was aber nicht allgemein üblich ist.

Wegen $y = f(x)$ ist $Y = F(x) = \int_0^x f(x) \cdot dx$, was zeigt, dass die Flächenfunktion durch Integrieren von $f(x)$ entsteht. Zur Angabe von Integrationsgrenzen, siehe Abschnitt *Die Integrationskonstante*.

Das Differenzieren und Integrieren konkreter Funktionen ist Gegenstand des Abschnitts *Differenzieren und Integrieren konkret*.

Das folgende Bild stellt die Funktion $f(x)$ und ihre beiden Abkömmlinge, nämlich die Steigungsfunktion $f'(x)$ und die Flächenfunktion $F(x)$ grafisch dar. Es eignet sich zur überschlägigen zahlenmäßigen Kontrolle sowie zur Untersuchung von Beziehungen.

Wir wollen zwar nach wie vor die Funktionen allgemein betrachten, haben aber als Funktion $f(x)$ eine Parabel gewählt. Durch die exakte Darstellung ihrer beiden Abkömmlinge können die Ordinaten $y',\ y\ und\ Y$ der drei Funktionen an der Stelle x zahlenmäßig nachvollzogen werden.



Neben seiner y-Koordinate ist der Punkt P auf $f(x)$ noch durch zwei weitere Zahlen gekennzeichnet, und zwar durch die Steigung $m=y'$ und die schraffierte Fläche Y.

Diese beiden Zahlen finden sich an der Stelle x als Ordinate y' der Steigungsfunktion $f'(x)$ und als Ordinate Y der Flächenfunktion $F(x)$ wieder.

> Im Bild oben ist $Y=12{,}7$ Man kann abschätzen, dass die schraffierte Fläche Y auch etwa 12,7 Flächeneinheiten groß ist. (Der Abstand der Skalenteilstriche beträgt 2).
>
> Die Steigung $m=y'=1{,}7$ Das Steigungsdreieck zeigt, dass die senkrechte Kathete etwa 1,7 mal so groß ist wie die waagerechte.

Das Bild einer Fläche und das einer Steigung sind nur bei $f(x)$ darstellbar. Bei den Abkömmlingen dieser Funktion sind es Strecken. Oder so: Die y-Koordinate einer Flächenfunktion steht für eine Fläche und die y-Koordinate einer Steigungsfunktion (Ableitung) für eine Steigung.

Der Umkehrcharakter von Differenzieren und Integrieren

Wir haben im Abschnitt zuvor die Funktion $f(x)$ differenziert *und* integriert. Ein möglicher Umkehrcharakter konnte dabei nicht zum Ausdruck kommen.

Deshalb wollen wir jetzt die Steigungsfunktion $f'(x)$ integrieren und die Flächenfunktion $F(x)$ differenzieren, um zu sehen, ob sich in beiden Fällen die Funktion $f(x)$ ergibt.

Der Umkehrcharakter von Differenzieren und Integrieren ist so bedeutsam, dass er Gegenstand des Fundamentalsatzes der Analysis ist. Aus diesem Satz folgt auch, dass sich das Differential- und das Integralzeichen aufheben, wenn sie direkt aufeinander treffen, wovon wir nun Gebrauch machen.

Wir differenzieren die Flächenfunktion $F(x)=\int_0^x f(x)\cdot dx$ mit

$d(F(x))=d(\int_0^x f(x)dx)=f(x)dx$ Das ergibt $\dfrac{d(F(x))}{dx}=f(x)$

Der Differentialquotient der Flächenfunktion führt zur Funktion $f(x)$, die jetzt die Rolle der Steigungsfunktion (Ableitung) von $f'(x)$ spielt.

Jetzt integrieren wir die Steigungsfunktion $\dfrac{d(f(x))}{dx}=f'(x)$ mit

$\int d(f(x))=\int f'(x)dx+C$ Daraus entsteht $f(x)=\int f'(x)dx+C$

Man sieht, dass auch das Integral der Steigungsfunktion die Funktion $f(x)$ ergibt. Deren Rolle ist jetzt die einer Flächenfunktion von $f'(x)$.

Wir haben die Integrationskonstante C eingeführt, die dafür sorgt, dass mit $C=2$ genau die im Bild dargestellte Parabel als Flächenfunktion entsteht und nicht irgendeine andere dazu parallele. Der nächste Abschnitt geht genauer auf die Integrationskonstante ein.

Die Integrationskonstante

Wir bleiben noch beim Bild im Abschnitt *Steigungs- und Flächenfunktion*. Die Steigungsfunktion $f'(x)$ könnte durch Differenzieren von jeder anderen in y-Richtung parallelen Parabel entstanden sein, weil bei solchen Funktionen die Steigung gleich verläuft. Oder so: Alle Funktionen, die sich nur durch die Verschiebung ihrer Graphen in y-Richtung unterscheiden, haben dieselbe Ableitung.

Wird nun $f'(x)$ integriert, so wie im Abschnitt zuvor, ist zunächst offen, welche Funktion $f(x)$ aus der Menge der zutreffenden Funktionen gemeint ist.

Dieses Problem besteht bei jeder Integration, also auch, wenn $f(x)$ integriert wird. Wir brauchen daher ein Kriterium, das die zutreffende Funktion bestimmt.

Dieses Kriterium haben wir implizit bereits genutzt, denn wir haben bei der Integration diejenige Funktion $F(x)$ gewählt, die durch den Ursprung geht. Denn nur dadurch gibt sie die Fläche unter $f(x)$ wieder. Weil bei $x=0$ ist die Fläche unter $f(x)$ gleich Null ist, muss gelten $F(0)=0$

Es kann aber auch sein, dass durch Integrieren keine ausdrückliche Flächenberechnung, sondern ein anderes Problem zu lösen ist. Dann trifft eine Kurve zu, die die y-Achse an irgendeiner anderen Stelle schneidet. Genau das ist im Abschnitt zuvor bei der Integration von $f'(x)$ der Fall gewesen. Wegen der Integration spielte zwar auch die Fläche unter $f'(x)$ eine Rolle, aber der eigentliche Zweck der Integration war, die Umkehrung des Differenzierens zu zeigen. Deshalb musste als Flächenfunktion, diejenige Parabel bestimmt werden, die die y-Achse bei $y=2$ schneidet.

Das wird erreicht, indem man einem Integral grundsätzlich die Integrationskonstante C zufügt, also $F(x)=\int f(x)dx + C$ Sie bestimmt die Kurve aus der Menge der möglichen, die die y-Achse an der Stelle C schneidet. Der Zahlenwert von C ergibt sich aus der konkreten Problemstellung.

Ist das Problem allein die Flächenberechnung, dann ist $C=0$. Bei Integralen zur Flächenberechnung entfällt daher die Integrationskonstante. Statt dessen werden diese Integrale mit der oberen und unteren Grenze der Fläche geschrieben. (Zur Flächenberechnung mit Grenzen, siehe Abschnitt *Angewandtes Integrieren)*

Höhere Ableitungen

Noch immer ist uns das Bild im Abschnitt *Steigungs- und Flächenfunktion* von Nutzen, und zwar bei der Frage, in welcher Beziehung die Funktion $f'(x)$ zur Funktion $F(x)$ steht. Wenn $f(x)$ als Ableitung von $F(x)$ angesehen werden kann, dann ist $f'(x)$ die *Ableitung der Ableitung* von $F(x)$, also die zweite Ableitung.

Nicht nur $F(x)$ hat eine zweite Ableitung, sondern jede Funktion $f(x)$

Wird deren Ableitung $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ differenziert, ergibt sich

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(f'(x))}{dx} \quad \text{sowie} \quad \frac{\frac{1}{dx} d(dy)}{dx} = f''(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$d^2 y$ bedeutet zweite Ableitung, nicht d Quadrat, denn d ist eine Bezeichnung und keine Zahl. Dagegen ist $d x^2$ das Differential der Fläche x^2 oder, was das gleiche ist, ein differentielles Quadrat mit der Seitenlänge dx.

Auch die dritte und weitere Ableitungen sind möglich, die aber auch Null sein können. Einschließlich der zweiten spricht man von höheren Ableitungen. Sie sind bei Extremwertaufgaben von Bedeutung, siehe Abschnitt *Angewandtes Differenzieren.*

Genauso kann man die Frage stellen, in welcher Beziehung die Funktion $F(x)$ zur Funktion $f'(x)$ steht. Es ist die zweite Integrationsstufe. Ob es dafür eine eingeführte Schreibweise gibt, muss offen bleiben.

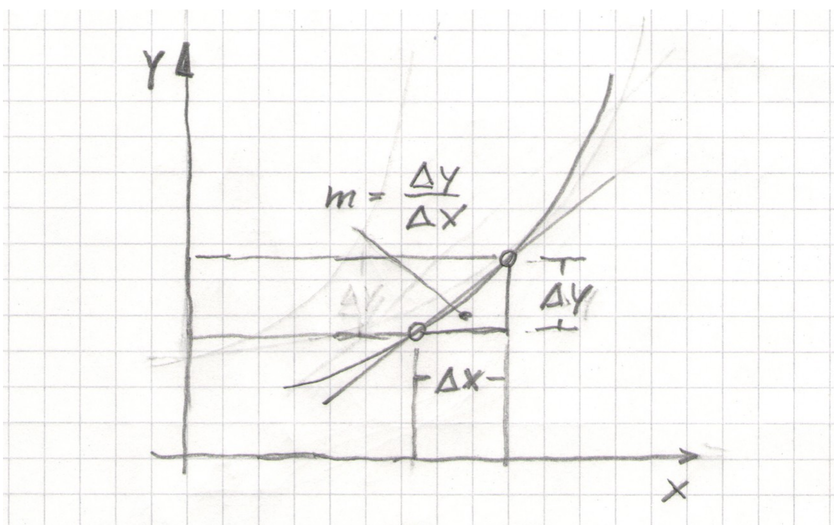
Differenzieren und Integrieren konkret

Wir wollen die allgemeinen Betrachtungen beenden und die konkrete Funktion $y = 2x^3 + 5$ differenzieren (ableiten). Die gefundene Ableitung wird im Anschluss integriert.

Differenzieren von $y = 2x^3 + 5$ heißt, die Funktion des Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(2x^3+5)}{dx}$ zu bestimmen.

Dazu lässt man das Steigungsdreieck einer Sekanten, die den Graphen an zwei nahe beieinander liegenden Punkten schneidet, in das Steigungsdreieck einer Tangenten übergehen. Die Katheten des Sekantendreiecks sind zwar sehr klein, aber sie sind keine Differentiale.

Dann entsprechen sie, projeziert auf die x- bzw. y-Achse, Differenzen von Achsenabschnitten, siehe Bild unten.



Diese Differenzen werden mit Δx bzw. Δy bezeichnet. Die Steigung m der Sekanten ist der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Mit Hilfe des Grenzwertes kann die exakte Beziehung zwischen Differenzenquotient und Differentialquotient angegeben werden $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Die Schreibung des Grenzwertes enthält die Aufforderung Δx gegen Null gehen zu lassen, um den Differentialquotienten zu erhalten. Geometrisch wird durch den Grenzübergang aus der Sekanten eine Tangente.

Zunächst wird der "Störfaktor" Δy beseitigt, indem Δy durch Δx ausgedrückt wird, und zwar so:

Wenn gilt $y = f(x)$, dann gilt auch $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ und weiter ist $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Der Differenzenquotient lautet dann $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, und sein Grenzwert ist $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Δx gegen Null gehen zu lassen, heißt letztlich doch Δx gleich Null zu setzen, was aber in dieser Formel nicht geht, weil durch Null zu dividieren wäre. Es bleibt die Hoffnung, dass beim Einsetzen einer konkreten Funktion Δx nicht mehr als Divisor auftritt.

Für unser Beispiel ist $f(x) = 2x^3 + 5$ und weiter ist $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^3 + 5$

Eingesetzt ergibt sich $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

Dann ist $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 \frac{(x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2(3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2)$

Δx steht jetzt nicht mehr im Nenner, und wir können mit $\Delta x = 0$ den Grenzwert errechnen.

Dadurch haben wir die Ableitung $y' = \frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$ der Funktion $y = 2x^3 + 5$ erhalten.

> Man beachte, dass der konstante Term +5 in der Ableitung nicht erscheint, aber beim anschließenden Integrieren als Integrationskonstante wieder aufleben wird, siehe auch Abschnitt *Die Integrationskonstante*.

Es wäre viel zu umständlich, jedes Mal den Grenzwert zu bilden, um eine Funktion zu differenzieren. Das geht mit Hilfe von Regeln einfacher.

Beispiele sind in der Mathematik zwar keine Beweise, trotzdem wollen wir aus dem Beispiel zuvor vier dieser Regeln entnehmen:

> Ein konstanter Faktor bleibt bei der Ableitung erhalten.
>
> Die Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$ ist $y' = \frac{dy}{dx} = n x^{(n-1)}$ oder
> $\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{(n-1)}$

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen ihrer Summanden.

Die Ableitung einer Konstanten ist Null.

Mit diesen Regeln sieht man sofort, dass $y = 2x^3 + 5$ differenziert $y' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$ ergeben muss.

Die Anwendung der Regeln ist bei einiger Übung eine ziemlich mechanische Angelegenheit, die wenig zum tieferen Verständnis der Infinitesimalrechnung beiträgt, weshalb wir es bei den vier Regeln belassen wollen und auf Lehrbücher verweisen.

Wir wollen die gefundene Ableitung integrieren, insbesondere weil wir die Funktion, die dabei entstehen muss, bereits kennen, was die Probe auf's Exempel ist.

Wir wenden die Formel $f(x) = \int f'(x) dx \ + \ C$ an und setzen die Ableitung unseres Beispiels $f'(x) = 6x^2$ ein.

Man erhält mit $C = 5$ $f(x) = \int 6x^2 dx \ + \ 5$ Die Konstante C ergibt sich aus dem Kontext, das heißt, wir wissen, dass $f'(x) = 6x^2$ aus $y = 2x^3 + 5$ entstanden ist.

Die Lösung einfacher Integrale gelingt durch Rückverfolgung des Differenzierens, durch das die zu integrierende Funktion entstanden wäre, wenn es diesen Vorgang gegeben hätte. Man erhält dadurch Grundintegrale und elementare Regeln, die vergleichbar mit den Differenzierungsregeln angewandt werden. Bei komplexeren Integralen wird mit verschiedenen Methoden versucht, sie auf Grundintegrale zurückzuführen. Das heißt auch, dass Intuition und Innovation gefordert sind.

Wenn wir aus der Ableitung $f'(x) = 6x^2$ durch Integrieren die Ausgangsfunktion $f(x) = 2x^3 + 5$ erhalten wollen, muss offensichtlich im Term $6x^2$ der Exponent um 1 erhöht werden, und der Faktor 6 muss durch 3 dividiert werden, um den Term $2x^3$ zu erhalten. Letzteres ist auch möglich, wenn der Faktor 6 vor das Integralzeichen gesetzt wird.

Das zeigt, dass die Integration eines konstanten Faktors den Faktor selbst ergibt.

Die verbal beschriebene Vorgehensweise kann allgemein als Grundintegral für die Integration einer Potenz x^m geschrieben werden:

$$y = \int x^m dx + C = \frac{1}{m+1} x^{(m+1)} + C \quad m \neq -1$$

Die Integration der Beispielfunktion mit $C = 5$ in Schritten:

$$f(x) = \int 6x^2 dx \ + \ C \ = \ 6 \int x^2 dx \ + \ C \ = \ 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 \ + \ C \ = \ 2x^3 \ + \ 5$$

Angewandtes Differenzieren

Die Lösung von Extremwertaufgaben gelingt mit Hilfe des Differenzierens. Funktionen haben dort einen Extremwert (Maximum oder Minimum), wo die Steigung (Ableitung) Null ist, also ihre Tangente waagerecht ist. Das heißt, die Stelle x des Extremwertes wird gefunden, indem man differenziert und x mit Hilfe von $y' = f'(x) = 0$ errechnet.

Daraus geht noch nicht hervor, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt. Das zeigt erst die zweite Ableitung. Von links nach rechts betrachtet, fällt die Tangente im Bereich eines Minimums, dann steigt sie. Das bedeutet, dass die Ableitung ihrerseits im Bereich eines Minimums von negativen y-Werten zu positiven steigt, also ihre Steigung und damit die zweite Ableitung positiv ist. Bei einem Maximum ist es umgekehrt.

Beispielsweise ist die Steigung von $f'(x)$ im Bild aus dem Abschnitt *Steigungs- und Flächenfunktion* dort positiv, wo die Parabel ein Minimum hat. (Weil es sich um den speziellen Fall der Parabel handelt, ist die Steigung von $f'(x)$ nicht nur im Bereich des Minimums positiv, sondern konstant über ihren gesamten Verlauf.)

Daraus schließen wir: Wenn die Steigung der *Ableitung* an der Stelle x positiv ist, ist der Extremwert der Ausgangsfunktion ein Minimum, und falls sie negativ ist, ist er ein Maximum.

Beispiel einer Extremwertaufgabe:

Aus einer Blechscheibe von 200 mm Durchmesser soll ein zylindrisches Gefäß mit dem größtmöglichen Volumen gezogen werden. Es wird angenommen, dass die Blechscheibe und das fertige Gefäß eine gleich große Oberfläche haben. Mit welchem Durchmesser und welcher Höhe muss das Gefäß hergestellt werden und wie groß ist sein Volumen?

Mit dem Durchmesser x und der Höhe h ist das Volumen des Gefäßes

$$V = \frac{x^2}{4} \pi h$$

Die Höhe h muss mit Hilfe der Formel für die Oberfläche des Gefäßes, die gleich der Oberfläche A der Scheibe ist, ersetzt werden.

Die Oberfläche des zylindrischen Gefäßes ist $\frac{x^2}{4} \pi + x \pi h = A$

Umgestellt ergibt sich $h = \frac{A}{x \pi} - \frac{x}{4}$ und weiter

$$V = \frac{x^2}{4} \pi \left(\frac{A}{x \pi} - \frac{x}{4} \right) = \frac{A x}{4} - \frac{\pi}{16} x^3$$

Wir verwenden das Millimeter als Längeneinheit und bezeichnen nur Zahlenergebnisse damit. Die Rechnungen haben eine technisch angemessene Genauigkeit.

Die Oberfläche der Scheibe beträgt $A = \left(\frac{200}{2} \right)^2 \pi = 31400\, mm^2$

Eingesetzt ergibt sich das Volumen: $V = 7850x - \frac{\pi}{16}x^3$

Diese Formel ist eine Funktion, die angibt wie das Volumen vom Durchmesser abhängt, und zwar für alle Gefäße mit der Oberfläche $31400\,mm^2$

Zum Differenzieren der Funktion reichen die vier Regeln, die wir gefunden haben aus. Die Ableitung lautet $V' = 7850 - \frac{\pi}{16}3x^2$ Wir setzen $V' = 0$ und berechnen x

Als Durchmesser bei maximalem Volumen ergibt sich

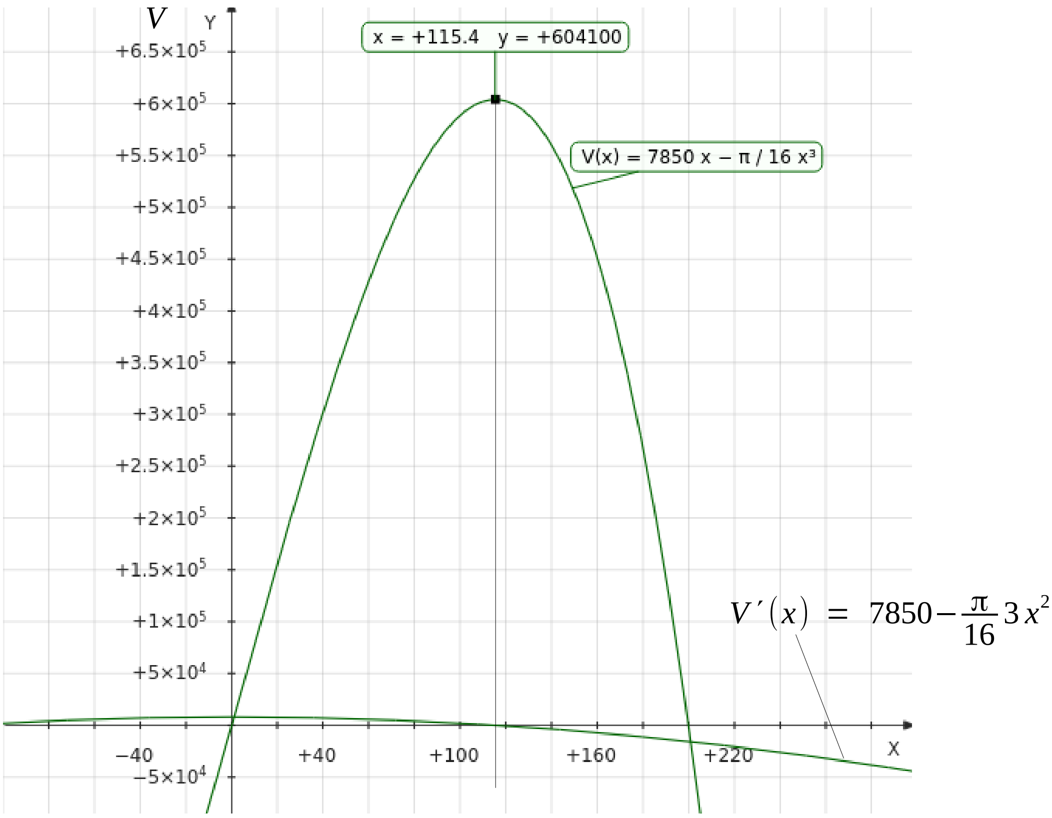
$x = \sqrt{\frac{7850 \cdot 16}{3\pi}} = 115{,}4\,mm$

Die Höhe ist dann $h = \frac{31400}{115{,}4\pi} - \frac{115{,}4}{4} = 57{,}7\,mm$

und das Volumen $V = 7850 \cdot 115{,}4 - \frac{\pi}{16}115{,}4^3 = 604140\,mm^3 \;\; oder \;\; 604{,}14\,ml$

Die Ableitung von $V' = 7850 - \frac{\pi}{16}3x^2$ ist $V'' = -\frac{\pi}{16}6x$ (zweite Ableitung)

Da bei $x = 115{,}4$ V'' negativ ist, ist der Extremwert an dieser Stelle ein Maximum.



Der Graph $V(x)$ im Bild oben zeigt das maximale Volumen und den zugehörigen Durchmesser auf der x-Achse. Das ist die Position, an der der Graph der Ableitung die x-Achse schneidet (an der V' gleich 0 ist). (Die zweite Ableitung ist nicht dargestellt, weil sie in diesem Diagramm nicht zu erkennen wäre).

Angewandtes Integrieren

Es liegt nahe, das Integrieren zu benutzen, um Flächen unterhalb eines Graphen zu berechnen.

Die y-Achse als seitliche Begrenzung der Fläche, die wir bisher angenommen haben, ist meistens nicht gewollt. Das heißt, es soll im allgemeinen Fall eine Fläche mit der unteren Begrenzung x_1 und der oberen Begrenzung x_2 berechnet werden. Die Lösung liegt auf der Hand: Man bestimmt die beiden an die y-Achse grenzenden Flächen und zieht sie voneinander ab.

Dafür steht die folgende Schreibweise:

$$A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{0}^{x_2} f(x)\,dx-\int_{0}^{x_1} f(x)\,dx=F(x_2)-F(x_1)$$

Wir wollen im nächsten Beispiel nicht einfach eine Fläche berechnen, sondern die Methode physikalisch anwenden. Wenn x und y für physikalische Größen stehen, dann entspricht die Fläche unter einem Graphen ebenfalls einer physikalischen Größe. Ein Beispiel dafür ist das Arbeitsintegral.

Arbeit W ist definiert als das Produkt von Kraft F und Weg s in Richtung der Kraft. Im allgemeinen Fall ist die Kraft veränderlich, also eine Funktion des Weges $F(s)$. Dann trifft die Definition nur für ein differentiell kleines Wegstück ds zu. Auf dem Weg ds wird die differentielle Arbeit $dW=F\cdot ds$ umgesetzt.

Die Arbeit, die von der Kraft zwischen den Positionen s_1 und s_2 umgesetzt wird, ist dann $W=W_{s_2}-W_{s_1}=\int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$, was der oben dargestellten Formel zur Flächenberechnung entspricht.

Die Funktion $F(s)$ ist ganz vom Anwendungsfall abhängig. Es kann die Charakteristik einer Feder sein oder wie im folgenden Beispiel Newtons Gravitationsgesetz.

Danach ziehen sich die Massen m_1 und m_2 im Abstand r mit der Kraft $F = \gamma\frac{m_1 * m_2}{r^2}$ an, wobei $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}$ die Gravitationskonstante ist. (Statt s ist der Formelbuchstabe r üblich.)

Es ist die Formel für die aufzuwendende Arbeit W zu finden, wenn der Abstand der Massen von r_1 auf r_2 vergrößert wird.

Das Gravitationsgesetz wird dazu als Funktion $F(r)$ in das Arbeitsintegral eingesetzt.

$W=\int_{r_1}^{r_2} \gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}dr$ Um das Integral zu lösen, genügt das im Abschnitt *Differenzieren und Integrieren konkret* entwickelte Grundintegral. Danach ist $\int r^{-2}dr=-\frac{1}{r}$

Das ergibt $W=\gamma\cdot m_1\cdot m_2\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}dr$ und weiter

$$W=\gamma\cdot m_1\cdot m_2(-\frac{1}{r_2}-(-\frac{1}{r_1}))=\gamma\cdot m_1\cdot m_2(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$$

Wir wollen noch ein praktisches Beispiel anfügen:

Mit Hilfe von Newtons Gravitationsgesetz ist die Hubarbeit zu errechnen, die ein Verkehrsflugzeug mit der Masse 250 Tonnen von Meereshöhe auf 10000 m Höhe steigen lässt. Zum Vergleich ist die Hubarbeit für denselben Steigvorgang zu errechnen, wenn angenommen wird, dass das Gewicht des Flugzeugs während des Steigens konstant bleibt.

Daten:

Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}$

Erdmasse $m_1 = 5{,}9722\cdot 10^{24}\,kg$

Masse des Flugzeugs $m_2 = 250000\,kg$

Erdradius $r_1 = 6371000\,m$

Erdradius+Steighöhe $r_2 = r_1+10000\,m = 6381000\,m$

Erdbeschleunigung $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

Wir verwenden die oben entwickelte Formel:

$$W = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \cdot 250 \cdot 10^{3} \left(\frac{1}{6371000} - \frac{1}{6381000}\right) = 24496 \cdot 10^{6}\, Ws$$

Da wir SI-kohärente Einheiten benutzt haben, hat das Ergebnis, also die Arbeit, die ebenfalls SI-kohärente Einheit Joule (J) oder Wattsekunde (Ws).

Umgerechnet entspricht diese Arbeit $24496 \cdot 10^{6}\, Ws \cdot \frac{1}{3600000} \frac{kWh}{Ws} = 6804\, kWh$

Das ist ungefähr der jährliche Stromverbrauch von 2 Durchschnittshaushalten oder die Energie, die in 680 l Heizöl steckt.

Wird zum Vergleich die Gewichtskraft als konstant angenommen,
ist $W = W_{s_2} - W_{s_1} = F(r_2 - r_1)$

Mit $F = m_2 \cdot g$ ist dann $W = m_2 \cdot g \cdot (r_2 - r_1)$

Mit Zahlen: $W = 250000 \cdot 9{,}81 \cdot 10000 = 24525 \cdot 10^{6}\, Ws$

Diese Hubarbeit ist um $29 \cdot 10^{6}\, Ws$ größer als bei der Rechnung zuvor. Größer deshalb, weil das Gewicht mit zunehmender Höhe konstant bleibt.

Die Abweichung beträgt etwa 0,12 % .